

# ATRATOR DE LORENZ: EFEITO BORBOLETA

Fernanda A. Ferreira (1)

## RESUMO

Este trabalho consiste numa descrição da importante descoberta obtida por E. Lorenz quando trabalhava num modelo para previsão meteorológica: o efeito borboleta. Na resolução de um sistema por processos iterativos, Lorenz verificou que uma simples diferença na ordem das décimas de milésimas e numa só variável traduzia-se em soluções completamente diferentes das anteriores obtidas. Este efeito reflecte a sensibilidade às condições iniciais do sistema, que é uma característica essencial dos sistemas caóticos, e observável em áreas da ciência tão diferentes, como a Matemática, a Física, a Biologia, a Economia, a Gestão, entre outras.

**PALAVRAS-CHAVE:** Atratores, Caos.

## INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, a ciência avança fruto da curiosidade e inteligência humanas. Estas características levaram o homem, em particular, a procurar padrões naquilo que, aparentemente, era aleatório. Durante milhares de anos, os cientistas acreditavam que, na posse das leis que regem a realidade e a determinam, seria possível prever o futuro. Pierre Simon Laplace afirmava que «uma inteligência que, num dado instante, conhecesse todas as variáveis do Universo, abarcaria na mesma fórmula os movimentos de todos os corpos: nada seria incerto para ela, o futuro, tal como o passado, estaria presente a seus olhos». Hoje, o determinismo é apenas um conceito teórico: nunca possuiremos aparelhos de medida suficientemente poderosos para que os erros experimentais não influenciem as previsões.

Curiosamente, foi no seguimento da procura de um padrão em comportamentos aleatórios que surgiu a *Teoria do Caos* (2).

Imaginemos um saco com berlindes. Se o despejarmos no chão, os berlindes espalham-se e é praticamente impossível prever a posição final de cada um, embora possamos ter uma ideia da região que irão ocupar. Mais ainda, qualquer repetição da experiência não produzirá o mesmo resultado, isto é, não conseguiremos que os berlindes ocupem a mesma posição da primeira experiência, por mais que tentemos repetir as condições iniciais do despejo. Esta facto deve-se à impossibilidade de termos em conta tudo o que pode influenciar a experiência, como sejam a posição do saco em relação ao chão, a distribuição dos berlindes dentro do saco, as pequenas irregularidades de cada berlinde e do chão, o movimento de despejo, etc.

(1) Departamento de Matemática da ESEIG, IPP, [fernandaarnelia@eseig.ipp.pt](mailto:fernandaarnelia@eseig.ipp.pt)

(2) A utilização do termo *caos* em Sistemas Dinâmicos foi introduzido pela primeira vez em 1975 por Li e Yorke.

Este exemplo ilustra bem o conceito de *sensibilidade às condições iniciais* introduzido por Henri Poincaré em 1908. Entre inúmeras descobertas e invenções, Poincaré fundou a moderna teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos. Vários matemáticos forneceram contribuições importantes à teoria de Poincaré, como Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson, Kolmogorov e Smale entre outros, tendo então surgido um novo campo de investigação sobre Sistemas Dinâmicos: a *Teoria do Caos*.

Esta teoria sofreu uma grande evolução nas últimas décadas, em particular devido ao forte desenvolvimento da informática. Edward Lorenz, um matemático dedicado à meteorologia, foi um dos primeiros utilizadores da informática. Em 1961, programou no seu computador, um arcaico Royal McBee, um simulador de clima, que lhe viria a proporcionar uma curiosa e importante descoberta. O modelo em que Lorenz trabalhava era composto por doze equações diferenciais, e o computador imprimia séries de números que representavam a evolução da pressão, temperatura, velocidade e direcção do vento. Um dia, no Inverno de 61, Lorenz quis reexaminar uma sequência temporal do seu simulador. Para ser mais rápido, começou a meio, utilizando os números da série anterior como ponto de partida. As duas séries deveriam ser exactamente iguais, mas logo após alguns termos (meses simulados) divergiram e perderam qualquer semelhança. Lorenz começou por pensar numa avaria do computador, mas veio a reparar que a razão era outra: o computador guardava, em memória, os números com seis casas decimais, mas só imprimia as três primeiras. Lorenz cometeu, assim, um erro da ordem dos décimos de milésimos – o suficiente para alterar completamente a evolução do sistema. Lorenz baptizou este efeito como o «efeito borboleta», devido à forma como foi colocado o problema:

*«Será que o bater das asas de uma borboleta hoje em Tóquio pode provocar uma tempestade violenta sobre Nova York em poucas semanas?»*

Este efeito reflecte a sensibilidade às condições iniciais do sistema – característica essencial dos sistemas caóticos.

Lorenz prosseguiu a análise do modelo meteorológico, reduzindo-o a apenas três equações diferenciais que ficaram conhecidas por *equações de Lorenz* (ver equações (3.1)). Utilizando novamente um computador, representou graficamente o comportamento dessas equações, tendo obtido um gráfico – designado *Atrator de Lorenz* (ver Figura 2) – com a forma de dupla espiral no espaço, sem um comportamento cíclico, visto que nunca passava duas vezes no mesmo ponto, mas restringido a um determinado volume. Chama-se *atractor* ao estado final a que tende um sistema dinâmico, independentemente do ponto de partida. Um pêndulo em movimento converge para uma oscilação de período constante; uma bola a rolar sobre uma superfície com atrito converge para a situação de velocidade nula. O atractor de Lorenz não corresponde nem a uma órbita regular nem à imobilização: é um «atractor

estranho» – O sistema nunca assume o mesmo estado duas vezes, apesar de haver uma vizinhança mais povoada. O sistema é caótico, imprevisível, mas ao mesmo tempo revela um peculiar tipo de ordem: converge para um atractor determinado.

### **SECÇÃO DE POINCARÉ**

Os modelos matemáticos utilizados para descreverem fenómenos físicos que mudam continuamente servem-se de *equações diferenciais*. Escolhendo um ponto de partida, isto é um conjunto de condições iniciais para a equação, as coordenadas do movimento subsequente são as soluções da equação diferencial com essas condições iniciais. O movimento de todos os pontos iniciais possíveis pode ser visualizado pensando num fluído imaginário, fluindo ao longo das trajectórias da equação. É usual designarmos a imagem de como essas linhas de fluxo se dispõem por *espaço de fase* da equação: O fluxo é indicado por linhas curvas, correspondendo à evolução no tempo de vários pontos iniciais, com setas indicativas da direcção do movimento com o decorrer do tempo.

Foi com descobertas na área das equações diferenciais que Poincaré obteve o seu doutoramento na universidade de Paris. Poincaré é apelidado por muitos, como o «último universalista», o último matemático capaz de trabalhar em todas as áreas da sua ciência. Poincaré ganhou o prémio atribuído pelo rei Óscar II da Suécia para a resolução do problema «Será o sistema solar estável?», sem, contudo o ter solucionado; o prémio deveu-se aos enormes progressos que fez na direcção da resolução do problema, criando, para o efeito, uma nova área da matemática a Topologia. É no artigo intitulado «Sobre o Problema de Três Corpos e as Equações da Dinâmica», publicado em 1890, que Poincaré apresenta os resultados fundamentais nesta direcção. Na primeira parte estabelece propriedades gerais das equações dinâmicas, e na segunda parte aplica os resultados ao problema de um número arbitrário de corpos que se movem sob o efeito da gravitação newtoniana.

O movimento de dois corpos – e estamos a pensar num universo constituído apenas pelo Sol e pela Terra – é periódico (de período um ano). Daqui resulta que a Terra não pode cair no Sol nem escapar-se para o infinito, pois se assim não fosse, tal teria de acontecer todos os anos. Ora, uma situação destas não se pode verificar mais do que uma vez, e como não ocorreu o ano passado, nunca acontecerá. Vemos assim que a periodicidade é uma forma útil de constataremos a estabilidade. Uma questão importante é, então, analisar a periodicidade dos movimentos. Imaginemos que o estado de um sistema é descrito pelas coordenadas de um ponto num *espaço de fases*. Esse ponto deve mover-se, à medida que o sistema evolui no tempo, descrevendo uma curva. Assim, se um sistema regressar a um estado anterior, a curva fecha-se. Vejamos a ideia de Poincaré para encontrar essas curvas fechadas. Consideremos o movimento de um satélite em órbita à volta da Terra. Pretendemos saber se o movimento é periódico. Em vez de observarmos o satélite ao longo de toda a trajectória, dirigimos o

telescópio de modo a vermos um plano na direcção norte-sul, apontando directamente para cima a partir do centro da Terra. De vez em quando atravessa esse plano. Registamos o ponto, a velocidade e a direcção em que o faz pela primeira vez. Se o movimento for periódico, o satélite acabará por atravessar o plano no mesmo ponto, com a mesma velocidade e na mesma direcção com que o fez pela primeira vez. Deste modo, para encontrarmos uma solução periódica, consideramos uma superfície de estados iniciais – designada *secção de Poincaré* – e seguimos a evolução de cada um até intersectar de novo a superfície. Se essa intersecção coincidir com o ponto de partida, estamos na presença de uma solução periódica.

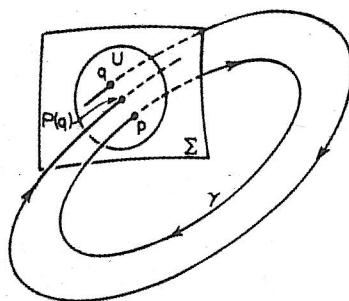


Figura 1 – A secção e a função de Poincaré

Poincaré, embora não tenha obtido uma solução explícita para o problema do movimento de três corpos, concluiu, através de uma análise qualitativa do sistema de equações correspondente ao problema, que este evoluía no sentido de comportamentos extremamente irregulares, complexos e não-periódicos – hoje designados *comportamentos caóticos*.

Devemos referir, aqui, que a descoberta da existência destes comportamentos provocou um enorme choque na ciência, pois contrariava profundamente tudo o que se conhecia e a Mecânica Celeste previa. E, contudo, podemos observar este tipo de comportamentos em áreas da ciência tão diferentes, como a Matemática, a Física, a Biologia, a Economia, a Gestão, etc. As variações climáticas e as oscilações da bolsa de valores são dois bons exemplos de *fenómenos caóticos*: fenómenos onde não há previsibilidade.

## O ATRATOR DE LORENZ

Vou, agora, descrever um dos exemplos mais interessantes de atrator caótico, descoberto, um pouco por acaso, por Edward Lorenz: o *atractor de Lorenz*.

E. Lorenz contribuiu fortemente para o desenvolvimento dos Sistemas Dinâmicos, com o seu famoso artigo «Deterministic nonperiodic flow», publicado há quatro décadas no *Journal of Atmospheric Sciences*.

E. Lorenz, um meteorologista do MIT (Massachusetts Institute of Technology) com forte vocação matemática, estava interessado em estabelecer um modelo que permitisse uma previsão meteorológica com precisão. Já existiam modelos matemáticos que imitam o comportamento da atmosfera usando processos iterativos. O mais famoso destes modelos é hoje, sem dúvida, o *atractor de Lorenz*, um objecto tridimensional, cujo corpo lembra uma borboleta. Este atractor foi descoberto por E. Lorenz, em 1961, quando trabalhava num modelo informático <sup>(3)</sup> de previsão meteorológica, baseado em doze equações diferenciais obtidas por B. Saltzman para descrever um tipo simples de *convecção*. Como se sabe, o transporte de energia pode efectuar-se de três maneiras diferentes: radiação, condução e convecção. O transporte de energia por convecção é o transporte de energia típico dos fluidos, e é observado nas mais diversas situações que vão desde a água a ferver numa panela até ao interior das estrelas. As equações diferenciais que permitem estudar a convecção são as célebres equações de Navier-Stokes, cuja solução analítica não é conhecida apesar dos muitos esforços realizados nesse sentido. Assim, a convecção é em geral estudada em casos particulares (alguns mesmo muito particulares) e Saltzman tinha estudado o modelo de Rayleigh de convecção térmica de fluidos, usando Análise de Fourier, ou melhor, desenvolvimentos em séries de Fourier com coeficientes dependentes do tempo (obviamente do tempo  $t$  da Mecânica e não do tempo meteorológico). Em particular, Saltzman (1962) determinou um sistema de equações diferenciais ordinárias (e não de derivadas parciais como é o caso geral de Navier-Stokes), correspondendo cada uma delas a cada um dos coeficientes dependentes do tempo  $t$ . Tratava-se de uma possível solução desde que os modos de baixa frequência dos desenvolvimentos em série de Fourier fossem em número limitado. Caso contrário, o problema mantinha-se praticamente insolúvel.

Baseado nas observações de Saltzman que afirmava que as soluções numéricas do seu sistema atingiam um comportamento final em que somente alguns modos continuavam a oscilar, tendo os outros modos atingido valores de equilíbrio, Lorenz decidiu analisar a dinâmica dos primeiros três modos das séries de Fourier, o que o levou a um sistema de três equações diferenciais em que o primeiro modo,  $x(t)$ , é o primeiro termo no desenvolvimento em série de Fourier do movimento convectivo, o segundo,  $y(t)$ , é o primeiro termo no desenvolvimento em série de Fourier da temperatura a variar na horizontal e o terceiro modo,  $z(t)$ , analisa o comportamento da temperatura na vertical (da base para o topo da atmosfera).

<sup>(3)</sup> O computador de Lorenz, um Royal McBee LGP-30, tinha 16 Kb de memória interna e podia efectuar 60 multiplicações por segundo. A integração numérica de um sistema de doze equações diferenciais era efectuada à velocidade de cerca de uma interação por segundo.

Partindo, então, do modelo de Saltzmann, Lorenz conseguiu reduzir o número de equações diferenciais de doze para três:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xz\end{aligned}\quad (3.1)$$

que constituem o hoje célebre *sistema de Lorenz*, mas cuja celebridade não se deve a grandes progressos na previsão meteorológica, mas sim ao seguinte fenómeno, considerado na época verdadeiramente extraordinário: ao resolver o sistema por processos iterativos, Lorenz descobriu que uma simples modificação de um dos valores iniciais de 0,506127 para 0,506 conduzia a resultados dramaticamente diferentes. Quer dizer, uma simples diferença na ordem das décimas milésimas e numa só variável, que pareceria um arredondamento, traduzia-se em soluções completamente diferentes das anteriormente obtidas. Uma conclusão imediata foi a «explicação» das razões da imprevisibilidade do clima. Outra conclusão, muito mais importante, foi o estudo profundo e metucioso do sistema de Lorenz, que é hoje um dos exemplos típicos do estudo de Sistemas Dinâmicos. Em linguagem de *Sistemas Dinâmicos*, o *sistema de Lorenz* é um *atractor* e é mesmo um *atractor caótico*, como vamos ver.

Para compreender o atractor de Lorenz, imaginemos uma caixa rectangular que apenas contém ar dentro de si. Se aquecermos a parte inferior da caixa e arrefecermos a parte superior, assistimos a um movimento de convecção do ar no interior da caixa. O ar que está em baixo sobe e o ar frio da parte de cima desce. De facto, é isto que realmente acontece com a atmosfera terrestre. Nas equações de Lorenz, as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam, respectivamente, o fluxo convectivo, a distribuição de temperatura horizontal, e a distribuição de temperatura vertical;  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\rho$  são parâmetros que representam, respectivamente, a razão entre a viscosidade e conductividade termal, a diferença de temperatura entre o topo e a base da caixa, e a razão entre a altura e largura da caixa. Lorenz utilizou os valores  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  e  $\rho = 28$ , para os quais descobriu uma dinâmica invulgar.

O comportamento do modelo de Lorenz é representado traçando as suas variáveis no espaço de fases, isto é, para cada cálculo sucessivo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , traçamos o ponto correspondente num espaço de fases tridimensional. Num sistema linear, obteríamos tipicamente trajectórias que convergiriam para um ponto fixo estável ou para um ciclo limite correspondendo a uma variação periódica. Lorenz descobriu que, para os valores dos parâmetros referidos acima, as trajectórias deste sistema nunca acabam num ponto fixo nem num ciclo limite estável, e, contudo, nunca divergem para o infinito – algo muito fora do que anteriormente se considerava usual. É por

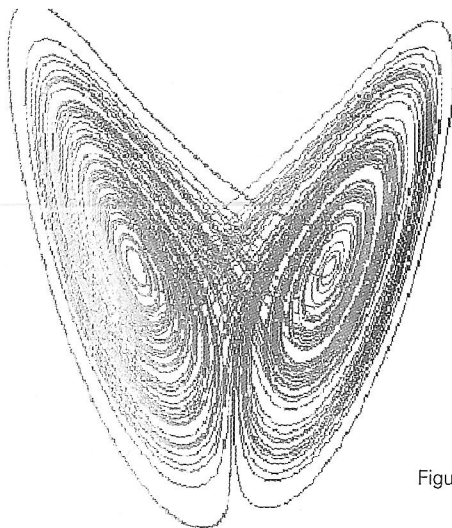


Figura 2 – O Atrator de Lorenz

isso que ao atrator gerado por estas equações se chama *atractor estranho*. O fluxo descrito pelas equações (3.1) não é hiperbólico, nem estruturalmente estável. Por outro lado, o seu comportamento dinâmico parece bastante robusto: o sistema é imprevisível mas converge para um comportamento determinado. A Figura 2 representa a solução de (3.1), obtida por integração sobre um longo período de tempo, e ilustra a complicada estrutura geométrica do atractor estranho, que tem aquela forma de «borboleta». Sensibilidade corresponde ao facto de que trajectórias que começam em dois pontos próximos, tipicamente terminam às voltas em «asas» diferentes da «borboleta». Existem órbitas no atractor estranho que são densas nele, resultando assim que o atractor seja dinamicamente indecomponível: Não pode ser decomposto em subconjuntos fechados e invariantes por acção do fluxo. Um outro facto importante deste modelo é que o atractor contém um ponto de equilíbrio:  $O(0,0,0)$  – as soluções parecem abrandar ao passar próximo dele.

Vamos considerar um *modelo geométrico* para as equações de Lorenz. Seja  $g$  o campo de vectores associado ao fluxo. Pode-se mostrar que, para quaisquer valores dos parâmetros,  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\rho$  próximos dos considerados por Lorenz, a derivada  $Dg_O$  (que é uma matriz cujos termos são derivadas parciais) possui um valor próprio positivo,  $\lambda_1 > 0$ , e dois valores próprios negativos,  $-\lambda_2 < -\lambda_3 < 0$ . Como consequência, existem duas trajectórias  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  que se movem a partir de  $O$  em sentidos contrários com a evolução do tempo (ver Figura 3). A união de  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  com o ponto de equilíbrio é chamada a *variedade instável* de  $O$ , e representada por  $W^u(O)$ . Além disso, existe uma superfície bidimensional que contém o ponto de equilíbrio e formada por soluções que convergem para  $O$ , quando o tempo tende para  $+\infty$  — é chamada a *variedade estável* de  $O$ , e representada por  $W^s(O)$ .



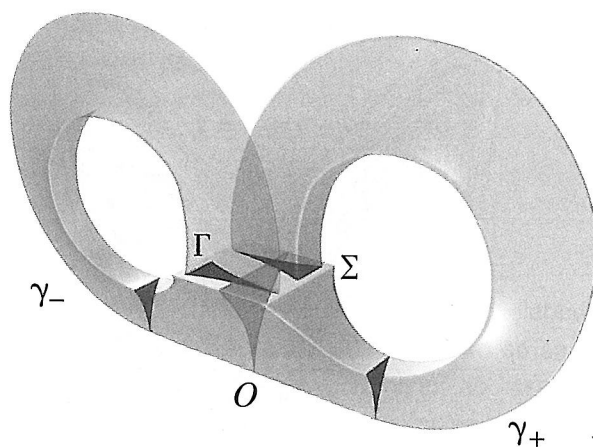


Figura 3 – Modelo geométrico de Lorenz.

Observações numéricas indicam que existe uma região bidimensional  $\Sigma$  que é intersectada transversalmente pelas trajetórias correspondentes ao fluxo, e que também intersecta a variedade estável  $W^s(O)$  ao longo de uma curva  $\Gamma$ . Além disso, as trajetórias  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  também intersectam  $\Sigma$ . Na verdade, todas as trajetórias que começam em qualquer das duas componentes conexas de  $\Sigma \setminus \Gamma$  também intersectam  $\Sigma$  ao fim de algum tempo. A definição precisa de *intersecção transversal* é uma intersecção de variedades tal que, a partir de qualquer ponto na intersecção, todas as direcções no espaço de fases podem ser geradas por combinações lineares de vectores tangentes às variedades. Esta definição parece estar de acordo com a noção comum de transversal, excepto por exemplo no caso de duas curvas se intersectarem num espaço tridimensional, pois neste caso a intersecção nunca é transversal, uma vez que combinações lineares dos dois vectores tangentes geram no máximo um plano. Uma intersecção transversal de variedades num espaço tridimensional exige no mínimo uma superfície a intersectar uma curva.

Voltando ao nosso modelo geométrico podemos dizer que  $\Sigma$  actua como uma «armadilha»: soluções que a atingem não podem deixar de retornar  $\Sigma$  a indefinidamente (a não ser que atinjam  $\Gamma$ , e nesse caso simplesmente convergem para  $O$  e nunca mais voltam a  $\Sigma$ ). O comportamento destas trajetórias pode ser entendido por observação dos pontos cujas trajetórias intersectam  $\Sigma$  sucessivamente. Ou seja, o estudo dinâmico do fluxo original pode ser reduzido ao da função de Poincaré  $z \mapsto P(z)$ , que a cada ponto  $z \in \Sigma \setminus \Gamma$  associa o ponto  $P(z)$  onde a trajetória de  $z$  intersecta  $\Sigma$ . A Figura 4 apresenta uma representação esquemática da imagem de  $\Sigma \setminus \Gamma$  pela função  $P$ .



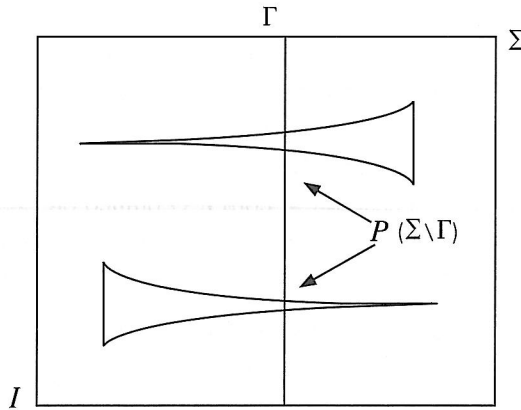


Figura 4 – A imagem da função de Poincaré  $P$

Uma outra propriedade importante é a existência de uma folheação – decomposição da secção transversal  $\Sigma$  em segmentos de curva «paralelos» (no sentido em que não se intersectam), as folhas da folheação, – que é invariante pela função de Poincaré  $P$ : se  $z_1$  e  $z_2$  são pontos de uma mesma folha, então as suas imagens,  $P(z_1)$  e  $P(z_2)$ , também pertencem a uma mesma folha. Podemos pensar as folhas como as linhas verticais na Figura 5. Além disso, a folheação é contractiva: dados dois pontos,  $z_1$  e  $z_2$ , numa mesma folha, a distância entre  $P^n(z_1)$  e  $P^n(z_2)$  converge exponencialmente para 0, quando  $n$  tende para  $+\infty$ .

Notemos que a existência da secção transversal permite passar do fluxo tridimensional para a função bidimensional  $P$ . A importância da existência desta folheação reside no facto de permitir reduzir ainda mais a dimensão do problema. Com efeito, pontos na mesma folha da folheação têm, essencialmente, o mesmo comportamento no futuro, em virtude das suas trajectórias ficarem cada vez mais próximas. Assim, a dinâmica da função  $P$  fica determinada pela análise da trajectória de um único ponto em cada folha – por exemplo, o ponto de intersecção da folha com um segmento horizontal dado.

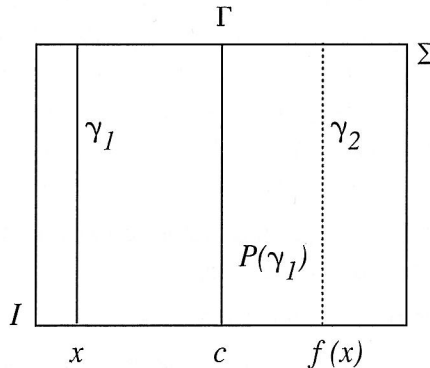


Figura 5 – Definição da função  $f$  no intervalo  $I$ .

Clarifiquemos um pouco esta ideia, com a ajuda da Figura 5. Consideremos um segmento horizontal  $I \subset \Sigma$ ; por exemplo, o lado inferior de  $\Sigma$ , que, por conveniência, devemos pensar como um intervalo real, digamos,  $I = [0, 1]$ . Dado um ponto  $x \in I$ , seja  $\gamma_1$  a folha que o contém. Pela invariância da função de Poincaré, a imagem de  $\gamma_1$ ,  $P(\gamma_1)$ , está contida numa folha  $\gamma_2$ . Definimos uma função  $f$  em  $I$  que ao ponto  $x$  associa o ponto  $f(x)$ , de intersecção de  $\gamma_2$  com  $I$ . O gráfico de  $f$  está representado na Figura 6, onde vemos uma descontinuidade no ponto  $c \in I$ , correspondente à folha  $\Gamma$ . Outra propriedade da função  $f$  é a expansividade: existe uma constante  $\tau > 1$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \geq \tau d(x, y),$$

para quaisquer pontos  $x, y$  localizados no mesmo lado do ponto de descontinuidade  $c$ .

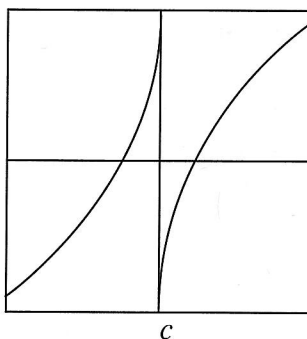


Figura 6 – O gráfico da função  $f$ .

Estas propriedades são utilizadas para provar que o fluxo exibe um atrator estranho  $\Lambda$ , que contém o ponto de equilíbrio  $O$ . O atrator é o fecho do conjunto das trajectórias que intersectam a secção transversal  $\Sigma$  uma infinidade de vezes no passado (bem como no futuro). Qualquer trajectória passada que intersecte  $\Sigma$  acumula em  $\Lambda$ , e estas trajectórias formam uma vizinhança do atrator.

Contudo, estas trajectórias são sensíveis às condições iniciais. Com efeito, sejam  $z$  e  $w$  dois pontos próximos, cujas órbitas progressivas intersectam  $\Sigma$ . Os pontos de intersecção estarão em duas folhas diferentes,  $\gamma_z$  e  $\gamma_w$ , da folheação (correspondentes a pontos próximos,  $x$  e  $y$ , de  $I$ ). Os pontos da intersecção seguinte das trajectórias do fluxo com  $\Sigma$  estarão em duas folhas,  $\gamma'_z$  e  $\gamma'_w$ , correspondentes aos pontos  $f(x)$  e  $f(y)$  de  $I$ . Pela expansividade de  $f$ ,  $d(\gamma'_z, \gamma'_w) < d(\gamma_z, \gamma_w)$ , pelo que a distância entre duas trajectórias do fluxo em intersecções sucessivas com  $\Sigma$  é crescente.

Uma outra conclusão importante é que o atrator contém órbitas densas (o mesmo é dizer que é dinamicamente indecomponível).

Concluindo esta análise, eis o que parece acontecer:

1. Há um atrator (Figura 2), contendo uma singularidade que é a origem  $(0, 0, 0)$  cujo vector associado é  $(0, 0, 0)$ .

2. Esse atractor é «pleno» de órbitas periódicas, ou, em termos de sistemas dinâmicos, o conjunto de órbitas periódicas é denso no atractor: próximo de qualquer ponto do atractor passa uma órbita periódica.
3. Existe no atractor uma região bidimensional que parece actuar tipo «buraco negro»: as soluções que passam nessa região não podem deixar de retornar a essa região (a não ser que pertençam à variedade estável da origem, e nesse caso convergem para a origem, não voltando jamais à região bidimensional considerada).
4. A região bidimensional considerada em 3. é intersectada transversalmente pelas trajectórias correspondentes ao fluxo, e daí poder chamar-se secção transversal, que pode ser decomposta em segmentos de curva «paralelos» (no sentido em que não se intersectam) e que são as folhas de uma «folheação».
5. A folheação é invariante sob acção de um operador: a função de Poincaré (função que transforma todos os pontos de uma secção de Poincaré nas respectivas imagens, seguindo trajectórias até voltarem à secção de Poincaré).
6. O fluxo exhibe um atractor estranho que contém o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ , e é o fecho do conjunto das trajectórias que intersectam a secção transversal.
7. As trajectórias mencionadas são sensíveis às condições iniciais.
8. O atractor contém órbitas densas, ou seja, é dinamicamente indecomponível, sendo robusto, no sentido em que, mesmo variando um pouco as condições iniciais, volta a obter-se o mesmo tipo de atractor.
9. O atractor estranho também é designado por atractor caótico, no sentido em que se trata de um atractor limitado que estende e dobra o conjunto das trajectórias finais, dando origem a uma sensibilidade às condições iniciais e a uma imprevisibilidade a longo termo.
10. Este atractor estranho (caótico) e robusto não é hiperbólico, o que resulta do facto das órbitas periódicas se acumularem na singularidade.

A partir destes resultados surge a conclusão: a previsão do tempo, correcta e segura, é impossível. E a impossibilidade deve-se, não à ignorância humana (poderia haver algo de errado com a matemática do sistema), mas sim, pelo contrário, ao conhecimento humano. Lorenz conjecturou essa impossibilidade, usando o seu atractor.

Cerca de 35 anos depois, C. Morales, M. J. Pacífico e E. Pujals (ver [7, MPP] e [8, MPP]), sabendo que qualquer atractor robusto sem pontos de equilíbrio é hiperbólico, conseguem demonstrar que: «Qualquer atractor robusto que contenha algum ponto de equilíbrio é do tipo do atractor de Lorenz».

E eis que surge a notícia de que o atractor de Lorenz existe efectivamente. Warwick Tucker anunciou em 9 de Fevereiro de 2002, num colóquio realizado no Centro de Matemática Aplicada da Universidade de Cornell, que tinha conseguido demonstrar

matematicamente todas as conclusões obtidas com o atrator de Lorenz. Eis o resumo da sua apresentação:

«*Abstract: We prove that the Lorenz equations support a strange attractor, as conjectured by Edward Lorenz in 1963. This conjecture was recently listed by Steven Smale as one of several challenging problems for the 21<sup>st</sup> century. We also prove that the attractor is robust, i.e., persists under small perturbations of the coefficients in the underlying differential equations. The proof is based on normal form theory and rigorous computations*».

## REFERÊNCIAS

- [1, Arr] Arrowsmith, D. K. and Place, C. M. [1991] *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press: Cambridge.
- [2, Dev] Devaney, R. L. [1989] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company: New York.
- [3, Fer] Ferreira, F. [2002] *Dinâmica Não Linear: Atratores*. Dissertação de Mestrado. Universidade Portucalense Infante D. Henrique: Porto.
- [4, Gle] Gleick, J. [1994] *Caos: A Construção de Uma Nova Ciência*. Gradiva: Lisboa.
- [5, Guc] Guckenheimer, J. and Holmes, P. [1997] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York.
- [6, HS] Hirsch, M. W. and Smale, S. [1974] *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press Linsited: London.
- [7, MPP] Morales, C., Pacifico, M. J. and Pujals, E. [1999] *Partial hyperbolicity and persistence of singular attractors*. Preprint.
- [8, MPP] Morales, C., Pacifico, M. J. and Pujals, E. [1998] *On  $C^1$  robust singular transitive sets for three-dimensional flows*. C. R. Acad. Sci. Paris, 326, Série I, 81-86.
- [9, Pal] Palis, J. [1999] *Sistemas caóticos e sistemas complexos*. Complexidade & Caos, Ed. H. M. Nussenzweig, UFRJ/COPEA, 27-38.
- [10, Rob] Robinson, C. [1999] *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press LLC: New York.
- [11, Sma] Smale, S. [1980] *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- [12, Ste] Stewart, I. [2000] *Deus Joga aos Dados? Ciência Aberta*, Gradiva: Lisboa.
- [13, Tuc] Tucker, W. [1998] *The Lorenz Attractor Exists*. PhD thesis, Univ. Uppsala. Text and program codes available at [www.math.uu.se/~warwick/](http://www.math.uu.se/~warwick/).
- [14, Via] Viana, M. [2000] *What's New on Lorenz Strange Attractors?* Math. Intel., vol 22, N.º 3, 6-19.